

Moderní logika

(verze z března 2026¹)

Podle začátku spisu RUSSELL, B., WHITEHEAD, A. N. *Principia Mathematica*,
Cambridge University Press. 1927.

Prvotní ideje (ang. *primitive ideas*)

Elementární proposice (česky obvykle „výroky“, ang. *elementary propositions*, z lat. *pono*, kladu; užíváme [pro ně] proměnné, ang. *variables*, z lat. *varius*, pestrý: p, q, r, s) jsou proposice, tj. výrazy (ang. *expressions*) buď pravdivé, anebo lživé, neobsahující žádné zdánlivé proměnné².

Elementární proposiční funkce (česky obvykle „výrokové funkce“, ang. *elementary propositional functions*, z lat. *fungor*, hraji, věnuji se) jsou výrazy obsahující proměnné, které po ohodnocení (z ang. *value*, z lat. *valeo*, zvládám) svých proměnných přejdou v elementární proposice; těm říkáme její hodnoty.

Zasazení (česky obvykle „tvrzení“, ang. *assertion*, z lat. *assero*, sázím do řady; \vdash) je přidání elementární proposice nebo elementární proposiční funkce i se všemi jejími instancemi (z lat. *sto*, stojím) do našeho rozvoje jako pravdivé zásady.

Negace (ang. *negation*, z lat. *ne*, ne; zapisujeme $\sim p$ a čteme „ne p“) je elementární proposiční funkce jedné proměnné [pro] elementární proposice, jejíž hodnota je pravdivá, byla-li hodnota proměnné lživá, a lživá, byla-li pravdivá.

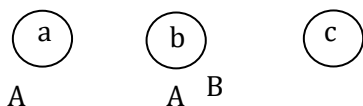
Disjunkce (ang. *disjunction*, z lat. *iungo*, pojím; zapisujeme $p \vee q$ a čteme „p nebo q“) je elementární proposiční funkce dvou proměnných [pro] elementární proposice, jejíž hodnota je pravdivá, byla-li aspoň jedna z hodnot proměnných pravdivá, a lživá, byly-li obě lživé.

¹ Za přečtení a připomínky děkuju Davidu Roubínkovi.

² Viz Další prvotní ideje.

Příklady

Představme si jako popis obrázku



věty o tom, u jakého kolečka je jaké velké písmeno. Např. „U kolečka s malým písmenem a je velké písmeno A.“ bychom chápali jako elementární proposici p .

Větu „U kolečka x je velké písmeno A.“ bychom pak chápali jako elementární proposiční funkci, která by přešla v pravdivou elementární proposici, kdybychom proměnnou x ohodnotili kolečkem s malým písmenem a, nebo kolečkem s malým písmenem b, a v nepravdivou elementární proposici, kdybychom proměnnou x ohodnotili kolečkem s malým písmenem c.

Do svého rozvoje budeme jako zásady přidávat (zasazovat) jen takové elementární proposice či elementární proposiční funkce, které jsou pravdivé o jakémkoli takovém obrázku, např. „U kolečka x je velké písmeno A, nebo tam není.“

Kdybychom v elementární proposiční funkci $\sim p$ proměnnou p ohodnotili jako „U kolečka s malým písmenem a je velké písmeno A.“, přešla by v „U kolečka s malým písmenem a není velké písmeno A.“ a byla by lživá.

Kdybychom v elementární proposiční funkci $p \vee q$ proměnnou p ohodnotili jako „U kolečka s malým písmenem a je velké písmeno A.“ a proměnnou q ohodnotili jako „U kolečka s malým písmenem c je velké písmeno A.“, přešla by v „U kolečka s malým písmenem a, nebo s malým písmenem c je velké písmeno A.“ a byla by pravdivá.

Nebo, abychom nevyvolávali dojem jen stavebnicového skládání, představme si elementární proposice jako (buď pravdivé, anebo lživé) myšlenky uchopené v nádobce na myšlenky (orig. *pensieve*) z populární dětské knížky:

... The silvery light was coming from the basin's contents... He could not tell whether the substance was liquid or gas. It was a bright, whitish silver, and it was moving ceaselessly; the surface of it became ruffled like water beneath wind, and then, like clouds, separated and swirled smoothly. It looked like light made liquid — or like wind made solid...

... Stříbřité světlo přicházelo z obsahu nádoby... Neuměl rozlišit, zda ta substance byla tekutá či plynná. Byla jasná, bělostně stříbrná a pohybovala se bez ustání; její povrch přecházel do zčeření jako voda ve větru, a pak se jako mraky rozpadala a hladce vířila. Vypadala jako rozteklé světlo – nebo jako zpevněný vítr... ³

Uchopíme-li takto myšlenku s proměnnou, pestrou barevností, která by přešla v elementární proposici po vyladění (ohodnocení) barev, držíme elementární proposiční funkci.

Uchopenou elementární proposici nebo elementární proposiční funkci si jako zásadu podržíme ve svých rozvíjených myšlenkách, bude-li pravdivá nezávisle na čemkoli.

Uchopíme-li myšlenku p a proměníme-li její pravdivost a lživost, držíme myšlenku $\sim p$.

Uchopíme-li myšlenku p s myšlenkou q a spojíme-li je do jedné tak, aby byla pravdivá, je-li aspoň jedna z těch dvou pravdivá, a aby byla lživá, jsou-li obě lživé, držíme myšlenku p v q.

³ Z knihy Rowling, J. K., *Harry Potter and the Goblet Of Fire*.

Definice implikace (ang. *implication*, z lat. *plico*, pletu)

*1.01 $p \rightarrow q$ (čteme „jestliže p , pak q “) je zkratka⁴ za $\sim p \vee q$

Prvotní proposice (ang. *primitive propositions*)

*1.1 Cokoli implikovaného pravdivou elementární proposicí je pravdivé. („pravidlo inference“, ang. *rule of inference*, z lat. *rego*, spravuji, a z lat. *fero*, resp. z řec. $\varphi\epsilon\rho\omega$, nesu)⁵

*1.2 $\vdash (p \vee p) \rightarrow p$

*1.3 $\vdash q \rightarrow (p \vee q)$

*1.4 $\vdash (p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$ („princip⁶ permutace“)

*1.5 $\vdash (p \vee (q \vee r)) \rightarrow (q \vee (p \vee r))$ („asociativní princip“)⁷

*1.6 $\vdash (q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow (p \vee r))$

*1.7 Negace elementární proposice je elementární proposicí.

*1.71 Disjunkce dvou elementárních proposic je elementární proposicí.

*1.72 V disjunkci dvou elementárních proposičních funkcí obsahujících tu samou proměnnou tuto proměnnou můžeme brát jako jednu. („pravidlo identifikace skutečné proměnné“)

⁴ „Definice“ jsou v PM zkratky, jež ale nejen zkracují, nýbrž i ukazují směr analýzy.

⁵ Na větší změny proti originálu se pokusím upozornit, především používám novější symboliku. Kromě toho, v PM je *1.1 doplněna o podmíněnou *1.11, která je pak v důkazech používána; ta výslovně zmiňuje elementární proposiční funkce (jež v důkazech opravdu ukazujeme) a zní „Jestliže $\vdash \varphi p$ a $\vdash \varphi p \rightarrow \psi p$, pak $\vdash \psi p$ “, případně i pro více proměnných. Použití proměnné [pro] elementární proposice je tu důležité z hlediska pravidla identifikace skutečné proměnné, resp. z hlediska pravidla typů. Pro svou podmíněnost je ale vždy použita spolu s dále neuváděnou *1.1, podle níž postupujeme. Já budu naopak psát *1.1 a tiše používat *1.11. Viz PM, s. 95.

⁶ Ponechávám ve jménech slova „princip“ a „zákon“ podle originálu, resp. tradice, ale z našeho pohledu jde o zásady (tj. ang. *assertions*).

⁷ Počet axiomů může být ještě snížen, *1.4 [Nicod], nebo *1.5 [Bernays] lze odvodit. Uvádím původní verzi.

Vyvádění proposice

*2.01 $\vdash (p \rightarrow \sim p) \rightarrow \sim p$ („princip důkazu sporem“, nebo „princip nepřímého důkazu“, lat. *reductio ad absurdum*, tj. doslova „převedení do neslyšitelnosti“)

Důkaz:

(1): *1.2 $[p := \sim p]$ $\vdash (\sim p \vee \sim p) \rightarrow \sim p$

(2): z (1), *1.01 $\vdash (p \rightarrow \sim p) \rightarrow \sim p$

(zápis $[p := \sim p]$ užíváme pro substituci $\sim p$ za p , výsledkem substituce je instance původní zásady; ang. *substitution*, z lat. *statuo*, stavím; kdybychom v *1.2 substituovali za p např. $\sim p \vee q$, výsledkem by bylo $\vdash ((\sim p \vee q) \vee (\sim p \vee q)) \rightarrow (\sim p \vee q)$, což je jiná instance téže zásady)

*2.02 $\vdash q \rightarrow (p \rightarrow q)$

Důkaz:

(1): *1.3 $[p := \sim p]$ $\vdash q \rightarrow (\sim p \vee q)$

(2): z (1), *1.01 $\vdash q \rightarrow (p \rightarrow q)$

*2.03 $\vdash (p \rightarrow \sim q) \rightarrow (q \rightarrow \sim p)$ („princip transposice“)

Důkaz:

(1): *1.4 $[p := \sim p, q := \sim q]$ $\vdash (\sim p \vee \sim q) \rightarrow (\sim q \vee \sim p)$

(2): z (1), *1.01 $\vdash (p \rightarrow \sim q) \rightarrow (q \rightarrow \sim p)$

*2.04 $\vdash (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r))$

Důkaz:

(1): *1.5 $[p := \sim p, q := \sim q]$ $\vdash (\sim p \vee (\sim q \vee r)) \rightarrow (\sim q \vee (\sim p \vee r))$

(2): z (1), *1.01 $\vdash (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r))$

*2.05 $\vdash (q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$ („princip sylogismu“)

Důkaz:

(1): *1.6 $[p := \sim p]$ $\vdash (q \rightarrow r) \rightarrow ((\sim p \vee q) \rightarrow (\sim p \vee r))$

(2): z (1), *1.01 $\vdash (q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$

*2.06 $\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$ („princip sylogismu“)

Důkaz:

- (1): *2.04 [p := q \rightarrow r, q := p \rightarrow q, r := p \rightarrow r]
 $\vdash ((q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)))$
 $\rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)))$
- (2): *2.05
 $\vdash (q \rightarrow r) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$
- (3): z (1) a (2), *1.1
 $\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$

*2.07 $\vdash p \rightarrow (p \vee p)$

Důkaz:

- (1): *1.3 [q := p] $\vdash p \rightarrow (p \vee p)$

*2.08 $\vdash p \rightarrow p$

Důkaz:

- (1): *2.05 [q := p \vee p, r := p] $\vdash ((p \vee p) \rightarrow p) \rightarrow ((p \rightarrow (p \vee p)) \rightarrow (p \rightarrow p))$
- (2): *1.2 $\vdash (p \vee p) \rightarrow p$
- (3): z (1) a (2), *1.1 $\vdash (p \rightarrow (p \vee p)) \rightarrow (p \rightarrow p)$
- (4): *2.07 $\vdash p \rightarrow (p \vee p)$
- (5): z (3) a (4), *1.1 $\vdash p \rightarrow p$

Komentář: V tomto důkazu je úplně rozepsané použití pravidla inference.

*2.1 $\vdash \sim p \vee p$ (ang. *law of excluded middle*, „zákon vyloučeného třetího“)

Důkaz:

- (1): *2.08 $\vdash p \rightarrow p$
- (2): z (1), *1.01 $\vdash \sim p \vee p$

*2.11 $\vdash p \vee \sim p$ („zákon vyloučeného třetího“)

Důkaz:

- (1): *1.4 [p := \sim p, q := p] $\vdash (\sim p \vee p) \rightarrow (p \vee \sim p)$
- (2): *2.1 $\vdash \sim p \vee p$
- (3): z (1) a (2), *1.1 $\vdash p \vee \sim p$

*2.12 $\vdash p \rightarrow \sim\sim p$ („princip dvojité negace“)

Důkaz:

(1): *2.11 [p := $\sim p$] $\vdash \sim p \vee \sim\sim p$

(2): z (1), *1.01 $\vdash p \rightarrow \sim\sim p$

*2.13 $\vdash p \vee \sim\sim\sim p$

Důkaz:

(1): *1.6 [q := $\sim p$, r := $\sim\sim\sim p$] $\vdash (\sim p \rightarrow \sim\sim\sim p) \rightarrow ((p \vee \sim p) \rightarrow (p \vee \sim\sim\sim p))$

(2): *2.12 [p := $\sim p$] $\vdash \sim p \rightarrow \sim\sim\sim p$

(3): z (1) a (2), *1.1 $\vdash (p \vee \sim p) \rightarrow (p \vee \sim\sim\sim p)$

(4): *2.11 $\vdash p \vee \sim p$

(5): z (3) a (4), *1.1 $\vdash p \vee \sim\sim\sim p$

*2.14 $\vdash \sim\sim p \rightarrow p$ („princip dvojité negace“)

Důkaz:

(1): *1.4 [q := $\sim\sim\sim p$] $\vdash (p \vee \sim\sim\sim p) \rightarrow (\sim\sim\sim p \vee p)$

(2): *2.13 $\vdash p \vee \sim\sim\sim p$

(3): z (1) a (2), *1.1 $\vdash \sim\sim\sim p \vee p$

(4): z (3), *1.01 $\vdash \sim\sim p \rightarrow p$

*2.15 $\vdash (\sim p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow p)$ („princip transposice“)

*2.16 $\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$ („princip transposice“)

*2.17 $\vdash (\sim q \rightarrow \sim p) \rightarrow (p \rightarrow q)$ („princip transposice“)

Důkazy vynecháváme.

*2.2 $\vdash p \rightarrow (p \vee q)$

Důkaz:

- | | |
|---|--|
| (1): *1.3 [p := q, q := p] | $\vdash p \rightarrow (q \vee p)$ |
| (2): *1.4 [p := q, q := p] | $\vdash (q \vee p) \rightarrow (p \vee q)$ |
| (3): *2.06 [q := q \vee p, r := p \vee q] | $\vdash (p \rightarrow (q \vee p)) \rightarrow (((q \vee p) \rightarrow (p \vee q)) \rightarrow (p \rightarrow (p \vee q)))$ |
| (4): z (1) a (3), *1.1 | $\vdash ((q \vee p) \rightarrow (p \vee q)) \rightarrow (p \rightarrow (p \vee q))$ |
| (5): z (2) a (4), *1.1 | $\vdash p \rightarrow (p \vee q)$ |

Takový důkaz budeme zkracovat:

- | | |
|----------------------------|--|
| (1): *1.3 [p := q, q := p] | $\vdash p \rightarrow (q \vee p)$ |
| (2): *1.4 [p := q, q := p] | $\vdash (q \vee p) \rightarrow (p \vee q)$ |
| (3): z (1) a (2), *2.06 | $\vdash p \rightarrow (p \vee q)$ |

Komentář: Touto zkratkou zavádíme používání zásady (v tomto případě principu sylogismu) jako pravidla, které v sobě má schované použití pravidla inference.

*2.21 $\vdash \sim p \rightarrow (p \rightarrow q)$

Důkaz:

- | | |
|----------------------------|---|
| (1): *2.2 [p := $\sim p$] | $\vdash \sim p \rightarrow (\sim p \vee q)$ |
| (2): z (1), *1.01 | $\vdash \sim p \rightarrow (p \rightarrow q)$ |

*2.3 $\vdash (p \vee (q \vee r)) \rightarrow (p \vee (r \vee q))$

Důkaz:

- | | |
|--|--|
| (1): *1.4 [p := q, q := r] | $\vdash (q \vee r) \rightarrow (r \vee q)$ |
| (2): *1.6 [q := q \vee r, r := r \vee q] | $\vdash ((q \vee r) \rightarrow (r \vee q)) \rightarrow ((p \vee (q \vee r)) \rightarrow (p \vee (r \vee q)))$ |
| (3): z (1) a (2), *1.1 | $\vdash (p \vee (q \vee r)) \rightarrow (p \vee (r \vee q))$ |

*2.31 $\vdash (p \vee (q \vee r)) \rightarrow ((p \vee q) \vee r)$

Důkaz:

(1): *2.3 $\vdash (p \vee (q \vee r)) \rightarrow (p \vee (r \vee q))$

(2): *1.5 [q := r, r := q] $\vdash (p \vee (r \vee q)) \rightarrow (r \vee (p \vee q))$

(3): z (1) a (2), *2.05 $\vdash (p \vee (q \vee r)) \rightarrow (r \vee (p \vee q))$

(4): *1.4 [p := r, q := p \vee q] $\vdash (r \vee (p \vee q)) \rightarrow ((p \vee q) \vee r)$

(5): z (3) a (4), *2.05 $\vdash (p \vee (q \vee r)) \rightarrow ((p \vee q) \vee r)$

Takový důkaz budeme zkracovat:

(1): *2.3 $\vdash (p \vee (q \vee r)) \rightarrow (p \vee (r \vee q))$

(2): *1.5 [q := r, r := q] $\vdash \dots \rightarrow (r \vee (p \vee q))$

(3): *1.4 [p := r, q := p \vee q] $\vdash \dots \rightarrow ((p \vee q) \vee r)$

Komentář: Touto zkratkou zavádíme postupné řetězení úprav pomocí principu sylogismu použitého jako pravidlo.⁸

*2.32 $\vdash ((p \vee q) \vee r) \rightarrow (p \vee (q \vee r))$

Důkaz:

(1): *1.4 [p := p \vee q, q := r] $\vdash ((p \vee q) \vee r) \rightarrow (r \vee (p \vee q))$

(2): *1.5 [p := r, q := p, r := q] $\vdash \dots \rightarrow (p \vee (r \vee q))$

(3): *2.3 [q := r, r := q] $\vdash \dots \rightarrow (p \vee (q \vee r))$

*2.38 $\vdash (q \rightarrow r) \rightarrow ((q \vee p) \rightarrow (r \vee p))$

Důkaz⁹:

(1): *2.06 [p := q \vee p, q := p \vee q, r := p \vee r]

$\vdash ((q \vee p) \rightarrow (p \vee q))$

$\rightarrow (((p \vee q) \rightarrow (p \vee r)) \rightarrow ((q \vee p) \rightarrow (p \vee r)))$

(2): *1.4 [p := q, q := p] $\vdash (q \vee p) \rightarrow (p \vee q)$

(3): z (1) a (2), *1.1 $\vdash ((p \vee q) \rightarrow (p \vee r)) \rightarrow ((q \vee p) \rightarrow (p \vee r))$

(4): *2.05 [p := q \vee p, q := p \vee r, r := r \vee p]

$\vdash ((p \vee r) \rightarrow (r \vee p))$

$\rightarrow (((q \vee p) \rightarrow (p \vee r)) \rightarrow ((q \vee p) \rightarrow (r \vee p)))$

(5): *1.4 [q := r] $\vdash (p \vee r) \rightarrow (r \vee p)$

⁸ V orig. je takové zkrácení provedeno trochu obecněji a složitěji.

⁹ V orig. je tento důkaz už jen naznačený.

(6): z (4) a (5), *1.1	$\vdash ((q \vee p) \rightarrow (p \vee r)) \rightarrow ((q \vee p) \rightarrow (r \vee p))$
(7): z (3) a (6), *2.06	$\vdash ((p \vee q) \rightarrow (p \vee r)) \rightarrow ((q \vee p) \rightarrow (r \vee p))$
(8): *1.6	$\vdash (q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow (p \vee r))$
(9): z (7) a (8), *2.05	$\vdash (q \rightarrow r) \rightarrow ((q \vee p) \rightarrow (r \vee p))$

*2.53 $\vdash (p \vee q) \rightarrow (\sim p \rightarrow q)$

Důkaz:

(1): *2.12	$\vdash p \rightarrow \sim\sim p$
(2): *2.38 [p := q, q := p, r := $\sim\sim p$]	$\vdash (p \rightarrow \sim\sim p) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow (\sim\sim p \vee q))$
(3): z (1) a (2), *1.1	$\vdash (p \vee q) \rightarrow (\sim\sim p \vee q)$
(4): z (3), *1.01	$\vdash (p \vee q) \rightarrow (\sim p \rightarrow q)$

Atd.¹⁰

¹⁰ Z této i dalších kapitol vybírám jen některé zásady.

Konjunkce

*3.01 $p \wedge q$ (čteme „p a q“) je zkratka za $\sim(\sim p \vee \sim q)$

Pak vyvodíme:

*3.1 $\vdash (p \wedge q) \rightarrow \sim(\sim p \vee \sim q)$

Důkaz:

(1): *2.08 [$p := \sim(\sim p \vee \sim q)$] $\vdash \sim(\sim p \vee \sim q) \rightarrow \sim(\sim p \vee \sim q)$

(2): z (1), *3.01 $\vdash (p \wedge q) \rightarrow \sim(\sim p \vee \sim q)$

Takový důkaz budeme zkracovat:

(1): *2.08 [$p := \sim(\sim p \vee \sim q)$], *3.01 $\vdash (p \wedge q) \rightarrow \sim(\sim p \vee \sim q)$

*3.11 $\vdash \sim(\sim p \vee \sim q) \rightarrow (p \wedge q)$

Důkaz:

(1): *2.08 [$p := \sim(\sim p \vee \sim q)$], *3.01 $\vdash \sim(\sim p \vee \sim q) \rightarrow (p \wedge q)$

*3.13 $\vdash \sim(p \wedge q) \rightarrow (\sim p \vee \sim q)$

Důkaz:

(1): *3.11 $\vdash \sim(\sim p \vee \sim q) \rightarrow (p \wedge q)$

(2): z (1), *2.15 $\vdash \sim(p \wedge q) \rightarrow (\sim p \vee \sim q)$

*3.14 $\vdash (\sim p \vee \sim q) \rightarrow \sim(p \wedge q)$

Důkaz:

(1): *3.1 $\vdash (p \wedge q) \rightarrow \sim(\sim p \vee \sim q)$

(2): z (1), *2.03 $\vdash (\sim p \vee \sim q) \rightarrow \sim(p \wedge q)$

*3.2 $\vdash p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q))$

Důkaz¹¹:

(1): *2.11 [p := $\sim p \vee \sim q$], *3.01 $\vdash (\sim p \vee \sim q) \vee (p \wedge q)$

(2): z (1), *2.32 [p := $\sim p$, q := $\sim q$, r := $p \wedge q$]

$\vdash \sim p \vee (\sim q \vee (p \wedge q))$

(3): z (2), *1.01 $\vdash p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q))$

Takový důkaz budeme zkracovat:

(1): *2.11, *3.01 $\vdash (\sim p \vee \sim q) \vee (p \wedge q)$

(2): z (1), *2.32, *1.01 $\vdash p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q))$

Komentář: Touto zkratkou už úplně vynecháváme psaní, co za co substituujeme, protože si to lze zpětně domyslet. Tento důkaz je docela snadné pochopit, ale bylo by (aspoň pro mne) dost těžké ho vymyslet.

*3.22 $\vdash (p \wedge q) \rightarrow (q \wedge p)$

Důkaz:

(1): *3.13 $\vdash \sim(q \wedge p) \rightarrow (\sim q \vee \sim p)$

(2): *1.4 $\vdash \dots \rightarrow (\sim p \vee \sim q)$

(3): *3.14 $\vdash \dots \rightarrow \sim(p \wedge q)$

(4): (3), *2.17 $\vdash (p \wedge q) \rightarrow (q \wedge p)$

*3.24 $\vdash \sim(p \wedge \sim p)$ (ang. *law of contradiction*, „zákon sporu“)

Důkaz:

(1): *2.11 $\vdash \sim p \vee \sim \sim p$

(2): z (1), *3.14 $\vdash \sim(p \wedge \sim p)$

*3.26 $\vdash (p \wedge q) \rightarrow p$

Důkaz:

(1): *2.02, *1.01 $\vdash \sim p \vee (\sim q \vee p)$

(2): z (1), *2.31 $\vdash (\sim p \vee \sim q) \vee p$

(3): z (2), *2.53 $\vdash \sim(\sim p \vee \sim q) \rightarrow p$

(4): z (3), *3.01 $\vdash (p \wedge q) \rightarrow p$

¹¹ V orig. je důkaz jen naznačený a rozložený do dvou částí, první je *3.12.

*3.27 $\vdash (p \wedge q) \rightarrow q$

Důkaz:

(1): *3.22 $\vdash (p \wedge q) \rightarrow (q \wedge p)$

(2): *3.26 $\vdash \dots \rightarrow q$

*3.3 $\vdash ((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$

Důkaz:

(1): *2.08, *3.01 $\vdash ((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow (\sim(\sim p \vee \sim q) \rightarrow r)$

(2): *2.15 $\vdash \dots \rightarrow (\sim r \rightarrow (\sim p \vee \sim q))$

(3): *2.08, *1.01 $\vdash \dots \rightarrow (\sim r \rightarrow (p \rightarrow \sim q))$

(4): *2.04 $\vdash \dots \rightarrow (p \rightarrow (\sim r \rightarrow \sim q))$

(5): *2.17 $\vdash (\sim r \rightarrow \sim q) \rightarrow (q \rightarrow r)$

(6): z (5), *2.05 $\vdash (p \rightarrow (\sim r \rightarrow \sim q)) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$

(7): z (4) a (6), *2.06 $\vdash ((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$

*3.31 $\vdash (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r)$

Důkaz:

(1): *2.08, *1.01 $\vdash (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (\sim p \vee (\sim q \vee r))$

(2): *2.31 $\vdash \dots \rightarrow ((\sim p \vee \sim q) \vee r)$

(3): *2.53 $\vdash \dots \rightarrow (\sim(\sim p \vee \sim q) \rightarrow r)$

(4): *2.08, *3.01 $\vdash \dots \rightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r)$

*3.33 $\vdash ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$ („princip sylogismu“)

*3.34 $\vdash ((q \rightarrow r) \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow r)$ („princip sylogismu“)

Důkazy vynecháváme.

*3.35 $\vdash (p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$

Důkaz¹²:

(1): *2.08 $\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)$

(2): z (1), *2.04 $\vdash p \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow q)$

(3): z (2), *3.31 $\vdash (p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$

¹² V orig. je tento důkaz trochu jinak.

*3.43 $\vdash ((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow (q \wedge r))$

*3.45 $\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow ((p \wedge r) \rightarrow (q \wedge r))$

*3.47 $\vdash ((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow s)) \rightarrow ((p \wedge q) \rightarrow (r \wedge s))$

Důkazy vynecháváme.

Atd.

Ekvivalence (ang. *equivalence*, z lat. *valeo*, zvládám)

*4.01 $p \leftrightarrow q$ (čteme „p, právě když q“) je zkratka za $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

Pak vyvodíme:

*4.1 $\vdash (p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$ („princip transposice“)

*4.11 $\vdash (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \leftrightarrow \sim q)$ („princip transposice“)

Důkazy vynecháváme.

*4.13 $\vdash p \leftrightarrow \sim\sim p$ („princip dvojité negace“)

Důkaz:

(1): *2.12 $\vdash p \rightarrow \sim\sim p$

(2): *2.14 $\vdash \sim\sim p \rightarrow p$

(3): z (1) a (2), *3.2, *4.01 $\vdash p \leftrightarrow \sim\sim p$

*4.2 $\vdash p \leftrightarrow p$

Důkaz:

(1): *2.08 $\vdash p \rightarrow p$

(2): z (1) dvakrát, *3.2, *4.01 $\vdash p \leftrightarrow p$

*4.21 $\vdash (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$

*4.22 $\vdash ((p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r)) \rightarrow (p \leftrightarrow r)$

*4.24 $\vdash p \leftrightarrow (p \wedge p)$

*4.25 $\vdash p \leftrightarrow (p \vee p)$

*4.3 $\vdash (p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$

*4.31 $\vdash (p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$

*4.32 $\vdash ((p \wedge q) \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r))$

*4.33 $\vdash ((p \vee q) \vee r) \leftrightarrow (p \vee (q \vee r))$

*4.4 $\vdash (p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$

*4.41 $\vdash (p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$

Důkazy vynecháváme.

Atd.

Důkazy s *1.7

*2.01 $\vdash (p \rightarrow \sim p) \rightarrow \sim p$

Důkaz¹³:

(1): *1.2

$\vdash (p \vee p) \rightarrow p$

(2): *1.7

$\sim p$ je elementární proposiční funkce

(3): z (2), *1.71, *1.72

$\sim p \vee \sim p$ je elementární proposiční funkce s jednou proměnnou

(4): z (3), *1.7

$\sim(\sim p \vee \sim p)$ je elementární proposiční funkce

(5): z (2) a (4), *1.71, *1.72

$\sim(\sim p \vee \sim p) \vee \sim p$ je elementární proposiční funkce s jednou proměnnou

(6): z (5), *1.01

$(\sim p \vee \sim p) \rightarrow \sim p$ je elementární proposiční funkce

(7): z (6) a (1) [$p := \sim p$]

$\vdash (\sim p \vee \sim p) \rightarrow \sim p$

(8): z (7), *1.01

$\vdash (p \rightarrow \sim p) \rightarrow \sim p$

Atd.

¹³ V orig. to takto rozepsané není, *1.7, *1.71 a *1.72 jsou většinou používané tiše, výjimkou je důkaz *3.03, kterou naopak já vynechávám.

Další prvotní ideje

Rozšíříme proposice i na ne-elementární. Proposice mohou obsahovat zdánlivé (dnes česky obvykle „vázané“, ang. původně *apparent*, dnes *bound*) proměnné.

Proposiční funkce (φ, ψ, χ s proměnnými x, y, z : $\varphi x, \varphi xy, \psi x$; proměnné zapisujeme x, y, z a mohou to být jakékoli proměnné: [pro] individua, proposice, proposiční funkce individuí, proposiční funkce proposičních funkcí... atd.) se po ohodnocení svých proměnných stanou proposicemi.

Universální kvantifikátor (česky obvykle „obecný“, ang. *universal quantifier*; zapisujeme $\forall x \varphi x$, kde x je zdánlivá proměnná¹⁴, a čteme „pro každé $x \varphi x$ “) je proposiční funkce jedné proměnné [pro] proposiční funkce, jejíž hodnota je pravdivá, byla-li hodnota proměnné taková, že všechny její hodnoty jsou pravdivé, a lživá, je-li aspoň jedna lživá.

Individuum (ang. *individual*, z lat. *divido*, dělím) je výraz, obsažený v jiných výrazech, jenž není ani proposicí, ani proposiční funkcí.

Rozšíření spojek

Spolu s negací a disjunkcí¹⁵ rozšíříme i definice implikace, konjunkce a ekvivalence i na ne-elementární proposice.

Existenční kvantifikátor

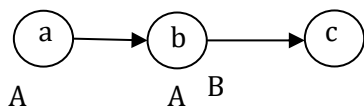
*10.01 $\exists x \varphi x$ (čteme „existuje takové x , že φx “) je zkratka za $\sim \forall x \sim \varphi x$

¹⁴ Zdánlivé proměnné v kvantifikátorech budeme volit vždy tak, aby se nepomotaly.

¹⁵ Postupují podle způsobu z *10 spíše než z *9.

Příklady

Např. o obrázku



bychom chápali jako pravdivé proposice:

$\forall x (Bx \rightarrow Ax)$ („U každého kolečka, u něhož je velké písmeno B, je velké písmeno A.“)

$\sim \forall x Bx$ („Ne u každého kolečka je velké písmeno B“.)

$\forall x (Ax \rightarrow \exists y Cxy)$ („Od každého kolečka, u něhož je velké písmeno A, vede šipka k nějakému kolečku.“)

$\sim \forall \varphi (\varphi b \rightarrow \varphi a)$ („Ne každá proposiční funkce kolečka s malým písmenem b je proposiční funkcí kolečka s malým písmenem a“.)

pokud bychom jako individua chápali kolečka a „od kolečka x vede šipka ke kolečku y“ bychom chápali jako proposiční funkci Cxy .

Nebo, vrátíme-li se k představě uchopování myšlenek z nádoby na myšlenky, univerzální kvantifikátor by byl uchopenou myšlenkou s proměnnou, pestrou barevností dále proměnných, pestře barevných myšlenek, která by přecházela v samé pravdivé proposice.

Individua by byly uchopené myšlenky, které bychom nechápali ani jako proposice, ani jako proposiční funkce.

Stejnost typu (ang. *being of the same type*, z lat. *typus*, ražba, resp. z řec. τύπτω, razím)

*9.131 Že dva výrazy jsou stejného typu, je zkratka za to, že:

- jsou oba individua
- nebo jsou oba elementární proposice
- nebo co oba obsahují, je stejných typů¹⁶

Další prvotní proposice

*9.14 Jakkoli je výraz obsahující proměnnou smysluplný, je smysluplný pouze s výrazem stejného typu jako je ta proměnná na jejím místě. („pravidlo typů“)

*10.1 $\vdash \forall x \varphi x \rightarrow \varphi y$

*10.11¹⁷ Co je pravdivé o čemkoli, tj. o jakémkoli uchopeném, je pravdivé o všem. („pravidlo universální generalizace“, ang. *rule of universal generalization*, z lat. *genus*, resp. z řec. γένος, rod)

*10.12 $\vdash \forall x (p \vee \varphi x) \rightarrow (p \vee \forall x \varphi x)$, kde p neobsahuje proměnnou x

Vyváděné proposice

*10.14 $\vdash (\forall x \varphi x \wedge \forall x \psi x) \rightarrow (\varphi y \wedge \psi y)$

Důkaz¹⁸:

(1): *10.1	$\vdash \forall x \varphi x \rightarrow \varphi y$
(2): *10.1 [$\varphi x := \psi x$]	$\vdash \forall x \psi x \rightarrow \psi y$
(3): z (1) a (2), *3.2	$\vdash (\forall x \varphi x \rightarrow \varphi y) \wedge (\forall x \psi x \rightarrow \psi y)$
(4): z (3), *3.47	$\vdash (\forall x \varphi x \wedge \forall x \psi x) \rightarrow (\varphi y \wedge \psi y)$

¹⁶ Zjednodušuji orig. formulaci, ale nemíním tím opravdu zjednodušit přístup, jak se historicky stalo.

¹⁷ V orig. je i podmíněné znění „Jestliže $\vdash \varphi y$, pak $\vdash \forall x \varphi x$ “, ale to by bylo potřeba vždy používat ve spojení s původní *1.1.

¹⁸ V orig. je místo *3.2 použit jiný postup; to samé platí i v následujících důkazech.

*10.2 $\vdash \forall x (p \vee \varphi x) \leftrightarrow (p \vee \forall x \varphi x)$

Důkaz:

- (1): *10.1 $\vdash \forall x \varphi x \rightarrow \varphi y$
(2): z (1), *1.6 $\vdash (p \vee \forall x \varphi x) \rightarrow (p \vee \varphi y)$
(3): z (2), *10.11 $\vdash \forall y ((p \vee \forall x \varphi x) \rightarrow (p \vee \varphi y))$
(4): z (3), 10.12, *1.01 $\vdash (p \vee \forall x \varphi x) \rightarrow \forall y (p \vee \varphi y)$
(5): *10.12 $\vdash \forall x (p \vee \varphi x) \rightarrow (p \vee \forall x \varphi x)$
(6): z (4) a (5), *3.2, *4.01 $\vdash \forall x (p \vee \varphi x) \leftrightarrow (p \vee \forall x \varphi x)$

*10.21 $\vdash \forall x (p \rightarrow \varphi x) \leftrightarrow (p \rightarrow \forall x \varphi x)$

Důkaz:

- (1): *10.2, *1.01 $\vdash \forall x (p \rightarrow \varphi x) \leftrightarrow (p \rightarrow \forall x \varphi x)$

*10.22 $\vdash \forall x (\varphi x \wedge \psi x) \leftrightarrow (\forall x \varphi x \wedge \forall x \psi x)$

Důkaz:

- (1): *10.1 $\vdash \forall x (\varphi x \wedge \psi x) \rightarrow (\varphi y \wedge \psi y)$
(2): *3.26 $\vdash \dots \rightarrow \varphi y$
(3): z (2), *10.11 $\vdash \forall y (\forall x (\varphi x \wedge \psi x) \rightarrow \varphi y)$
(4): z (3), *10.21 $\vdash \forall x (\varphi x \wedge \psi x) \rightarrow \forall y \varphi y$
(5): analogicky, *3.27 $\vdash \forall x (\varphi x \wedge \psi x) \rightarrow \forall y \psi y$
(6): z (4) a (5), *3.43 $\vdash \forall x (\varphi x \wedge \psi x) \rightarrow (\forall y \varphi y \wedge \forall y \psi y)$
(7): *10.14 $\vdash (\forall x \varphi x \wedge \forall x \psi x) \rightarrow (\varphi y \wedge \psi y)$
(8): z (7), *10.11 $\vdash \forall y ((\forall x \varphi x \wedge \forall x \psi x) \rightarrow (\varphi y \wedge \psi y))$
(9): z (8), *10.21 $\vdash (\forall x \varphi x \wedge \forall x \psi x) \rightarrow \forall y (\varphi y \wedge \psi y)$
(10): z (6) a (9), *3.2, *4.01 $\vdash \forall x (\varphi x \wedge \psi x) \leftrightarrow (\forall x \varphi x \wedge \forall x \psi x)$

Komentář: V řádce (5) slovem „analogicky“ nahrazujeme zopakování celého postupu v řádcích (1) až (4), jen s použitím *3.27 namísto *3.26. Tento důkaz má stromovou podobu: v řádcích (1) až (4) si připravíme první krok, v řádce (5) druhý krok, tyto dva spojíme v řádce (6), čím máme dokázaný jeden směr implikace, druhý směr dokážeme v řádcích (7) až (9), oba směry spojíme v řádce (10).

*10.24 $\vdash \varphi y \rightarrow \exists x \varphi x$

Důkaz:

- (1): *10.1 $\vdash \forall x \sim \varphi x \rightarrow \sim \varphi y$
(2): z (1), *2.03, *10.01 $\vdash \varphi y \rightarrow \exists x \varphi x$

*10.25 $\vdash \forall x \varphi x \rightarrow \exists x \varphi x$

Důkaz:

(1): *10.1 $\vdash \forall x \varphi x \rightarrow \varphi y$

(2): *10.24 $\vdash \dots \rightarrow \exists x \varphi x$

*10.251 $\vdash \forall x \sim \varphi x \rightarrow \sim \forall x \varphi x$

Důkaz:

(1): *10.25, *10.01 $\vdash \forall x \varphi x \rightarrow \sim \forall x \sim \varphi x$

(2): z (1), *2.03 $\vdash \forall x \sim \varphi x \rightarrow \sim \forall x \varphi x$

*10.252 $\vdash \sim \exists x \varphi x \leftrightarrow \forall x \sim \varphi x$

Důkaz¹⁹:

(1): *2.08, *10.01 $\vdash \sim \exists x \varphi x \rightarrow \sim \sim \forall x \sim \varphi x$

(2): *2.14 $\vdash \dots \rightarrow \forall x \sim \varphi x$

(3): *2.08, *10.01 $\vdash \exists x \varphi x \rightarrow \sim \forall x \sim \varphi x$

(4): (3), *2.03 $\vdash \forall x \sim \varphi x \rightarrow \sim \exists x \varphi x$

(5): (2), (4), *3.2, *4.01 $\vdash \sim \exists x \varphi x \rightarrow \forall x \sim \varphi x$

nebo:

(1): *4.13 $\vdash \forall x \sim \varphi x \leftrightarrow \sim \sim \forall x \sim \varphi x$

(2): z (1), *4.21 $\vdash \sim \sim \forall x \sim \varphi x \leftrightarrow \forall x \sim \varphi x$

(3): z (2), *10.01 $\vdash \sim \exists x \varphi x \leftrightarrow \forall x \sim \varphi x$

*10.253 $\vdash \sim \forall x \varphi x \leftrightarrow \exists x \sim \varphi x$

Důkaz:

(1): *10.1 $\vdash \forall x \varphi x \rightarrow \varphi y$

(2): *2.12 $\vdash \dots \rightarrow \sim \sim \varphi y$

(3): z (2), *10.11, *10.21 $\vdash \forall x \varphi x \rightarrow \forall y \sim \sim \varphi y$

(4): z (3), *2.16 $\vdash \sim \forall x \sim \sim \varphi x \rightarrow \sim \forall x \varphi x$

(5): z (4), *10.01 $\vdash \exists x \sim \varphi x \rightarrow \sim \forall x \varphi x$

(6): *10.1 $\vdash \forall x \sim \sim \varphi x \rightarrow \sim \sim \varphi y$

(7): analogicky, *2.14 $\vdash \sim \forall x \varphi x \rightarrow \exists x \sim \varphi x$

(8): z (5) a (7), *3.2, *4.01 $\vdash \sim \forall x \varphi x \leftrightarrow \exists x \sim \varphi x$

¹⁹ V orig. trochu jinak.

*10.26 $\vdash (\forall x (\varphi x \rightarrow \psi x) \wedge \varphi y) \rightarrow \psi y$

Důkaz²⁰:

(1): *10.1 $\vdash \forall x (\varphi x \rightarrow \psi x) \rightarrow (\varphi y \rightarrow \psi y)$

(2): z (1), *3.31 $\vdash (\forall x (\varphi x \rightarrow \psi x) \wedge \varphi y) \rightarrow \psi y$

*10.27 $\vdash \forall x (\varphi x \rightarrow \psi x) \rightarrow (\forall x \varphi x \rightarrow \forall x \psi x)$

Důkaz:

(1): *10.14 $\vdash (\forall x (\varphi x \rightarrow \psi x) \wedge \forall x \varphi x) \rightarrow ((\varphi y \rightarrow \psi y) \wedge \varphi y)$

(2): *3.35 $\vdash \dots \rightarrow \psi y$

(3): z (2), *10.11, *10.21 $\vdash (\forall x (\varphi x \rightarrow \psi x) \wedge \forall x \varphi x) \rightarrow \forall y \psi y$

(4): z (3), *3.3 $\vdash \forall x (\varphi x \rightarrow \psi x) \rightarrow (\forall x \varphi x \rightarrow \forall x \psi x)$

*10.271 $\vdash \forall x (\varphi x \leftrightarrow \psi x) \rightarrow (\forall x \varphi x \leftrightarrow \forall x \psi x)$

Důkaz:

(1): *2.08, *4.01 $\vdash \forall x (\varphi x \leftrightarrow \psi x) \rightarrow \forall x ((\varphi x \rightarrow \psi x) \wedge (\psi x \rightarrow \varphi x))$

(2): *10.22 $\vdash \dots \rightarrow (\forall x (\varphi x \rightarrow \psi x) \wedge \forall x (\psi x \rightarrow \varphi x))$

(3): *3.26 $\vdash \dots \rightarrow \forall x (\varphi x \rightarrow \psi x)$

(4): *10.27 $\vdash \dots \rightarrow (\forall x \varphi x \rightarrow \forall x \psi x)$

(5): analogicky, *3.27 $\vdash \forall x (\varphi x \leftrightarrow \psi x) \rightarrow (\forall x \psi x \rightarrow \forall x \varphi x)$

(6): z (4), (5), *3.43, *4.01 $\vdash \forall x (\varphi x \leftrightarrow \psi x) \rightarrow (\forall x \varphi x \leftrightarrow \forall x \psi x)$

*10.28 $\vdash \forall x (\varphi x \rightarrow \psi x) \rightarrow (\exists x \varphi x \rightarrow \exists x \psi x)$

Důkaz:

(1): *10.1 $\vdash \forall x (\varphi x \rightarrow \psi x) \rightarrow (\varphi y \rightarrow \psi y)$

(2): *2.16 $\vdash \dots \rightarrow (\sim \psi y \rightarrow \sim \varphi y)$

(3): (2), *10.11, *10.21 $\vdash \forall x (\varphi x \rightarrow \psi x) \rightarrow \forall y (\sim \psi y \rightarrow \sim \varphi y)$

(4): *10.27 $\vdash \dots \rightarrow (\forall x \sim \psi x \rightarrow \forall x \sim \varphi x)$

(5): *2.16, *10.01 $\vdash \dots \rightarrow (\exists x \varphi x \rightarrow \exists x \psi x)$

*10.3 $\vdash (\forall x (\varphi x \rightarrow \psi x) \wedge \forall x (\psi x \rightarrow \chi x)) \rightarrow \forall x (\varphi x \rightarrow \chi x)$

Důkaz:

(1): *10.22 $\vdash (\forall x (\varphi x \rightarrow \psi x) \wedge \forall x (\psi x \rightarrow \chi x))$

$\leftrightarrow \forall x ((\varphi x \rightarrow \psi x) \wedge (\psi x \rightarrow \chi x))$

(2): (1), *4.01, *3.26 $\vdash (\forall x (\varphi x \rightarrow \psi x) \wedge \forall x (\psi x \rightarrow \chi x))$

²⁰ V orig. jen naznačeno, odkazy na kap. *2 a *3 už jsou nadále používány tiše.

$\rightarrow \forall x ((\varphi x \rightarrow \psi x) \wedge (\psi x \rightarrow \chi x))$
 (3): *3.33, *10.11 $\vdash \forall x (((\varphi x \rightarrow \psi x) \wedge (\psi x \rightarrow \chi x)) \rightarrow (\varphi x \rightarrow \chi x))$
 (4): (3), *10.27 $\vdash \forall x ((\varphi x \rightarrow \psi x) \wedge (\psi x \rightarrow \chi x)) \rightarrow \forall x (\varphi x \rightarrow \chi x)$
 (5): (2), (4), *2.06 $\vdash (\forall x (\varphi x \rightarrow \psi x) \wedge \forall x (\psi x \rightarrow \chi x)) \rightarrow \forall x (\varphi x \rightarrow \chi x)$

nebo:

(1): *10.14 $\vdash (\forall x (\varphi x \rightarrow \psi x) \wedge \forall x (\psi x \rightarrow \chi x)) \rightarrow ((\varphi y \rightarrow \psi y) \wedge (\psi y \rightarrow \chi y))$
 (2): *3.33 $\vdash \dots \rightarrow (\varphi y \rightarrow \chi y)$
 (3): z (2), *10.11, *10.21 $\vdash (\forall x (\varphi x \rightarrow \psi x) \wedge \forall x (\psi x \rightarrow \chi x)) \rightarrow \forall x (\varphi x \rightarrow \chi x)$

*11.2 $\vdash \forall x \forall y \varphi xy \leftrightarrow \forall y \forall x \varphi xy$

Důkaz²¹:

(1): *10.1 $\vdash \forall x \forall y \varphi xy \rightarrow \forall y \varphi zy$
 (2): *10.1 $\vdash \dots \rightarrow \varphi zw$
 (3): z (2), *10.11, *10.21 $\vdash \forall x \forall y \varphi xy \rightarrow \forall z \varphi zw$
 (4): z (3), *10.11, *10.21 $\vdash \forall x \forall y \varphi xy \rightarrow \forall w \forall z \varphi zw$
 (5): analogicky $\vdash \forall y \forall x \varphi xy \rightarrow \forall z \forall w \varphi zw$
 (6): z (4) a (5), *3.2, *4.01 $\vdash \forall x \forall y \varphi xy \leftrightarrow \forall y \forall x \varphi xy$

*11.26 $\vdash \exists x \forall y \varphi xy \rightarrow \forall y \exists x \varphi xy$

Důkaz:

(1): *10.1 $\vdash \forall y \varphi xy \rightarrow \varphi xz$
 (2): z (1), *10.11 $\vdash \forall x (\forall y \varphi xy \rightarrow \varphi xz)$
 (3): z (2), *10.28 $\vdash \exists x \forall y \varphi xy \rightarrow \exists x \varphi xz$
 (4): z (3), *10.11, *10.21 $\vdash \exists x \forall y \varphi xy \rightarrow \forall y \exists x \varphi xy$

Komentář: V tomto důkazu jde o to nepomotat proměnné.

²¹ V orig. je výslovně rozšířené *10.1, *10.11 a pak *10.21 na více proměnných.

$$*11.51 \quad \vdash \exists x \forall y \varphi xy \leftrightarrow \sim \forall x \exists y \sim \varphi xy$$

Důkaz:

- | | |
|---------------------------|--|
| (1): *10.253 | $\vdash \sim \forall y \varphi xy \leftrightarrow \exists y \sim \varphi xy$ |
| (2): z (1), *10.11 | $\vdash \forall x (\sim \forall y \varphi xy \leftrightarrow \exists y \sim \varphi xy)$ |
| (3): z (2), *10.271 | $\vdash \forall x \sim \forall y \varphi xy \leftrightarrow \forall x \exists y \sim \varphi xy$ |
| (4): z (3), *4.11, *10.01 | $\vdash \exists x \forall y \varphi xy \leftrightarrow \sim \forall x \exists y \sim \varphi xy$ |

Atd.

Důkazy s *9.14

$$*10.14 \quad \vdash (\forall x \varphi x \wedge \forall x \psi x) \rightarrow (\varphi y \wedge \psi y)$$

Důkaz:

- | | |
|--------------------------------------|---|
| (1): *10.1 | $\vdash \forall x \varphi x \rightarrow \varphi y$ |
| (2): *10.1 [$\varphi x := \psi x$] | $\vdash \forall x \psi x \rightarrow \psi y$ |
| (3): | výrazy φy a ψy jsou smysluplné tak, že obsahují proměnnou stejného typu |
| (4): z (3), *9.14 | výrazy $\forall x \varphi x \rightarrow \varphi y$ a $\forall x \psi x \rightarrow \psi y$ obsahují příslušné proměnné stejného typu, a můžeme je brát jako jedny |
| (5): z (4), *9.14 | výraz $(\forall x \varphi x \rightarrow \varphi y) \rightarrow ((\forall x \psi x \rightarrow \psi y) \rightarrow ((\forall x \varphi x \rightarrow \varphi y) \wedge (\forall x \psi x \rightarrow \psi y)))$ obsahuje příslušné proměnné stejného typu, a můžeme je brát jako jedny |
| (6): z (1), (2) a (5), *3.2 | $\vdash (\forall x \varphi x \rightarrow \varphi y) \wedge (\forall x \psi x \rightarrow \psi y)$ |
| (7): z (6), *3.47 | $\vdash (\forall x \varphi x \wedge \forall x \psi x) \rightarrow (\varphi y \wedge \psi y)$ |

kde (3) byl tichý předpoklad.

Atd.

Paradoxy

Pravidlo typů má bránit paradoxům vznikajícím z toho, že bychom přijímali za hodnoty proměnných i proposice nebo proposiční funkce, v nichž jsou obsaženy.

Např. tzv. paradox lháře (ang. *liar paradox*): Uvažme proposiční funkci „p je lež.“ Kdyby hodnotou p byla pravdivá proposice, stala by se tato proposiční funkce lživou proposicí, a kdyby hodnotou p byla lživá proposice, stala by se tato proposiční funkce pravdivou proposicí. Co ale, kdyby hodnotou p byla sama proposice, jíž by se po ohodnocení stala? Tj. co kdyby se stala proposicí

Tato proposice je lživá.

Byla by pravdivá, anebo lživá?

Obranou proti takovýmto paradoxům je pravidlo typů spolu s definicí stejnosti typu, podle nichž jsou hodnoty proměnné p stejného typu, i když není dáno jakého, ale samotná proposice obsahující tuto proměnnou (nebo její hodnotu) je jiného typu. Není proto sama smysluplně hodnotou p.

Převoditelnost

Přijímáme další prvotní ideu: Predikativní funkce (ang. *predicative function*, z lat. *dico*, říkám, ukazuji; $\varphi!$) je proposiční funkce, která nepřidává ke svým proměnným žádné zdánlivé proměnné, tj. nepřidává kvantifikátory.

Dále přijímáme prvotní proposici:

*12.1 $\vdash \exists \varphi! \forall x (\psi x \leftrightarrow \varphi!x)$ („axiom převoditelnosti“, nebo „axiom redukovatelnosti“, ang. *axiom of reducibility*, z lat. *duco*, vedu)

Identita (ang. *identity*, z lat. *idem*, týž)

*13.01 $x = y$ je zkratka za $\forall \varphi! (\varphi!x \rightarrow \varphi!y)$

Pak vyvodíme:

*13.1 $\vdash x = y \leftrightarrow \forall \varphi! (\varphi!x \rightarrow \varphi!y)$

Důkaz:

(1): *4.2 $\vdash \forall \varphi! (\varphi!x \rightarrow \varphi!y) \leftrightarrow \forall \varphi! (\varphi!x \rightarrow \varphi!y)$

(2): z (1), *13.01 $\vdash x = y \leftrightarrow \forall \varphi! (\varphi!x \rightarrow \varphi!y)$

*13.101 $\vdash x = y \rightarrow (\psi x \rightarrow \psi y)$

Důkaz vynecháváme, využívá *12.1.

*13.15 $\vdash x = x$ („zákon identity“)

Důkaz:

(1): *2.08 $\vdash \varphi!x \rightarrow \varphi!x$

(2): z (1), *10.11 $\vdash \forall \varphi! (\varphi!x \rightarrow \varphi!x)$

(3): z (2), *13.1 $\vdash x = x$

*13.16 $\vdash x = y \leftrightarrow y = x$

*13.17 $\vdash (x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z$

Důkazy vynecháváme.

Atd.

Třídy

Třída (ang. *class*, z lat. *classis*, z lat. *clamo*, volám, zvu, resp. z řec. καλέω zvu; zapisujeme $\{x; \psi x\}$ a čteme „třída všech x takových, že ψx “, užíváme [pro ně] proměnné: α, β) je neúplný symbol, což znamená, že sám smysl nemá, ale smysl mají proposice a proposiční funkce, jež ho obsahují:

*20.01 $\chi\{x; \psi x\}$ je zkratka za $\exists \varphi! (\forall x (\psi x \leftrightarrow \varphi!x) \wedge \chi \varphi!)$

*20.02 $y \in \{x; \varphi!x\}$ (čteme „ y je prvkem třídy $\{x; \varphi!x\}$ “) je zkratka za $\varphi!y$

Pak vyvodíme:

*20.11 $\vdash \forall x (\psi x \leftrightarrow \varphi x) \rightarrow (\chi\{x; \psi x\} \leftrightarrow \chi\{x; \varphi x\})$

*20.3 $\vdash y \in \{x; \psi x\} \leftrightarrow \psi y$

*20.31 $\vdash \{x; \psi x\} = \{x; \varphi x\} \leftrightarrow \forall y (y \in \{x; \psi x\} \leftrightarrow y \in \{x; \varphi x\})$

Důkazy vynecháváme.

Atd.

K třídám definujeme:

*22.01 $\alpha \subset \beta$ (čteme „ α je podtřída β “) je zkratka za $\forall x (x \in \alpha \rightarrow x \in \beta)$

*22.02 $\alpha \cap \beta$ (čteme „průnik α s β “) je zkratka za $\{x; x \in \alpha \wedge x \in \beta\}$

*22.03 $\alpha \cup \beta$ (čteme „sjednocení α s β “) je zkratka za $\{x; x \in \alpha \vee x \in \beta\}$

*22.04 $\sim \alpha$ (čteme „doplněk α “) je zkratka za $\{x; \sim x \in \alpha\}$

*22.05 $\alpha - \beta$ (čteme „rozdíl α s β “) je zkratka za $\alpha \cap \sim \beta$

*24.02 \emptyset (čteme „prázdná třída“) je zkratka za $\{x; \sim x = x\}$

Russellův paradox

Uvažme třídu $\{x; \sim x \in x\}$, tedy třídu všech x , jež nejsou svým vlastním prvkem. Je tato třída svým vlastním prvkem?

Pravidlo typů spolu s definicí stejnosti typu je obranou i proti takovýmto paradoxům. Podle nich jsou hodnoty proměnné x (resp. příslušné výrazy v proposicích a proposičních funkcích, za něž jsou proposiční funkce o třídách zkratkami) stejného typu, i když není dáno jakého, ale samotná třída (resp. příslušná proposiční funkce) je jiného typu. Výraz $x \in x$ je proto nesmyslný, a není ani pravdivý, ani lživý.²²

Relace

Relace (ang. *relation*, z lat. *latus*, nesený, související s lat. *fero*, nesu; užíváme [pro ně] proměnnou ρ) je rozšíření tříd na dvojice (a analogicky pak trojice... atd.), je to také neúplný symbol, což znamená, že sám smysl nemá, ale smysl mají proposice a proposiční funkce, jež ho obsahují:

*21.01 $\chi\{<x, y>; \psi_{xy}\}$ je zkratka za $\exists \varphi! (\forall x (\psi_{xy} \leftrightarrow \varphi!_{xy}) \wedge \chi \varphi!)$

*21.02 $x\{<x, y>; \psi_{xy}\}y$ (čteme „ x je v relaci $\{<x, y>; \psi_{xy}\}$ s y “) je zkratka za $\varphi!_{xy}$

Dále budeme mluvit o oboru (ang. *domain*, z lat. *domos*, resp. řec. δόμος, dům, domov; \sqsupset) a obráceném oboru (ang. *converse domain*; \sqsubset) relací:

*33.11²³ $\sqsupset(\rho)$ je zkratka za $\{x; \exists y x\rho y\}$

*33.111 $\sqsubset(\rho)$ je zkratka za $\{y; \exists x x\rho y\}$

a o jednom zvláštním druhu relací, $1 \rightarrow 1$ relacích, což jsou takové²⁴, v nichž ke každému prvku $\sqsupset(\rho)$ existuje právě jeden²⁵ prvek $\sqsubset(\rho)$ a naopak.

²² Viz PM, s. 60 – 63.

²³ V orig. to nejsou definice, ale důsledky obecnějších definic.

²⁴ V orig. to je zvláštní případ užití definice *70.01.

²⁵ $\forall x (x \in \sqsupset(\rho) \rightarrow \exists y (x\rho y \wedge \forall z (x\rho z \rightarrow z = y)))$

Čísla

*73.01 α je podobná β , je zkratka za $\exists \rho (\rho \text{ je } 1 \rightarrow 1 \wedge \sqsupset(\rho) = \alpha \wedge \sqsubset(\rho) = \beta)$

*100.01 $Nc(\alpha)$ je zkratka za $\{\beta; \alpha \text{ je podobná } \beta\}$ („číslo třídy α “, ang. *number of a class*, z lat. *numerus*, číslo; užíváme [pro ně] proměnné: μ, ν)

Zvlášť vezměme čísla²⁶

*101.1 0 je zkratka za $Nc(\emptyset)$

*101.2 1 je zkratka za $Nc(\alpha)$, kde α je jednoprvková²⁷ třída

*101.3 2 je zkratka za $Nc(\alpha)$, kde α je dvouprvková²⁸ třída

atd... a definici sčítání

*110.02 $\mu + \nu$ je zkratka za $Nc(\alpha \cup \beta)$, kde $\mu = Nc(\alpha)$, $\nu = Nc(\beta)$ a $\alpha \cap \beta = \emptyset$

Pak vyvodíme:

*110.643 $\vdash 1 + 1 = 2$

Důkaz²⁹:

Sjednocení dvou jednoprvkových tříd s prázdným průnikem je dvouprvková třída.

Atd.

²⁶ V orig. to nejsou definice, ale opět důsledky obecnějších definic, v tomto případě z *52 a *54.

²⁷ $\exists x (x \in \alpha \wedge \forall y (y \in \alpha \rightarrow x = y))$

²⁸ $\exists x \exists y ((\sim x = y \wedge (x \in \alpha \wedge y \in \alpha)) \wedge \forall z (z \in \alpha \rightarrow (z = x \vee z = y)))$

²⁹ Důkaz jen naznačuji.